Tarea 2. Análisis Real

Matemáticas I

1. Determine si las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}$:

   (a) $d(x,\, y) = |x^3 - y^3|$,
   (b) $d(x,\, y) = \exp\left\{\frac{1}{|x-y|}\right\}$.

2. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos y las funciones $d_3, d_4 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ definidas como sigue: para cualesquiera $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$,

$$d_3((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)) = d_1(x_1,\, x_2) + d_2(y_1,\, y_2) \ ,$$
$$d_4((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)) = \max\{d_1(x_1,\, x_2),\, d_2(y_1,\, y_2)\}.$$

   Demuestre que d_3, d_4 son métricas en $(X \times Y)$.

3. Sea $(X,\, d)$ un espacio métrico y sean A, B dos subconjuntos no vacíos de X. Demuestre que, si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces
$$diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B).$$

4. Sea $(X,\, d)$ un espacio métrico y sea A un subconjunto no vacío de X con $diam(A) < r$, donde $r > 0$. Sea $a \in X$ tal que $A \cap B_r(a) \neq \emptyset$, demostrar que $A \subseteq B_{2r}(a)$.

5. Sea X un conjunto no vacío. Definamos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para cualesquiera $x,\, y \in X$,
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$
   Demuestre que $(X,\, d)$ es un espacio métrico. Describa los subconjuntos abiertos y cerrados de este espacio métrico.

6. Sean d y e métricas definidas sobre un conjunto X. Se dice que las métricas d y e son equivalentes si existen números reales positivos α y β tales que
$$\alpha \leq \frac{d(x,\, y)}{e(x,\, y)} \leq \beta \qquad \text{para todo} \quad x,\, y \in X \quad \text{y} \quad x \neq y.$$
   Demuestre que si d y e son métricas equivalentes, entonces los espacios $(X,\, d)$ y $(X,\, e)$ tienen los mismos conjuntos abiertos.

7. Sea $(X,\, d)$ un espacio métrico y sean e y f dos funciones reales definidas en $X \times X$ por
$$e(x,y) = \min\{1,\, d(x,\, y)\},$$
$$f(x,y) = \frac{d(x,\, y)}{1 + d(x,\, y)} \ ,$$
   respectivamente.

   (a) Demuestre que e y f son distancias en X.
   (b) Demuestre que $(X,\, d)$ y $(X,\, e)$ son topológicamente equivalentes (i.e., cualquier conjunto abierto en $(X,\, d)$ es un conjunto abierto en $(X,\, e)$ y vice versa).

8. Sean A y B conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Demuestre que el producto Cartesiano $A \times B$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. *Sugerencia: Use sucesiones.*

9. Sean $B_r(x)$ y $\bar{B}_r(x)$ las bolas abiertas y cerradas en el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_2)$, respectivamente. Demuestre que $cl(B_r(x)) = \bar{B}_r(x)$. ¿Es esta relación valida para cualquier métrica sobre $\mathbb{R}^n$?

10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Demuestre que

$$diam(A) = diam(cl(A)).$$

11. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto no vacío de X. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función que mide la distancia entre cualquier punto de X y el conjunto A; es decir,

$$f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\} \quad \text{para cada } x \in X.$$

   (a) Demuestre que f es continua.
   (b) Demuestre que $x \in cl(A)$ si y sólo si $f(x) = 0$.
   (c) Demuestre que $x \in ext(A)$ si y sólo si $d(x, A) > 0$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que f es continua si y sólo si los conjuntos

$$I_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\} \quad \text{y} \quad S_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$$

son abiertos en $\mathbb{R}^n$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestre que el conjunto de nivel

$$A_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \alpha\}$$

   es en conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

   (b) Demuestre que el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}$$

   es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$. (De forma análoga se puede demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado).

14. Sea $f : X \to Y$ una función donde (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos. Demuestre que la función f es continua si y sólo si $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$.

15. En este ejercicio demostrará que el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales es cerrado.

   (a) Sean $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto

$$F_1 := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b\right\}$$

   es cerrado en $\mathbb{R}^n$. *Sugerencia: Puede hacer la demostración directa o puede usar el ejercicio anterior definiendo adecuadamente una función lineal y verificando que es continua.*

   (b) Sean A una matriz de tamaño $n \times m$ una matriz no nula con entradas reales y $b = (b_1, \ldots, b_m)' \in \mathbb{R}^m$ un vector fijo. Demuestre que el conjunto factible del sistema de desigualdades $Ax \geq b$, dado por

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

   es cerrado en $\mathbb{R}^n$. *Sugerencia: Use el hecho de que la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

16. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Probar que T es una función continua, considerando la métrica inducida por la norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.(*indicación*: pruebe primero que existe un número M tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$).

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en un punto x_0 y supongamos que $f(x_0) \neq 0$. Demostrar que existe una bola abierta $B_r(x_0)$ tal que todo $y \in B_r(x_0)$ cumple que el signo de $f(y)$ es igual al signo de $f(x_0)$.