Tarea 1. Conjuntos y relaciones

Matemáticas I

1. Sea W el conjunto de palabras de un diccionario de la Lengua Española. Considere las siguientes relaciones en W:

   - $R_1 := \{(x, y) \in W \times W|$ x e y empiezan con la misma letra$\}$.
   - $R_2 := \{(x, y) \in W \times W|$ x e y tienen al menos una letra en común$\}$.
   - $R_2 := \{(x, y) \in W \times W|$ x aparece antes que y en el diccionario$\}$.

   Determine si las relaciones tienen las propiedades reflexividad, simetría o transitividad. Para cada relación con todas las propiedades anteriores determine las clases de equivalencia.

2. Demuestra que la relación R definida en $\mathbb{Z}$ mediante aRb si y sólo si $a - b$ es múltiplo de 3 es de equivalencia. Determina las clases de equivalencia. ¿Qué ocurre si en vez de 3 se considera cualquier número $z \in \mathbb{Z}_+$?

3. Considera una relación de preferencias $\succsim$ definida en X. Demuestra que si $\succsim$ es racional entonces la relación de indiferencia $\sim$ es una relación de equivalencia pero la relación de preferencia estricta $\succ$ no lo es.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Sea R una relación en A definida mediante xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$.

   a) Demuestra que R es de equivalencia.
   b) Describe las clases de equivalencia para el caso particular $A = [-1, 1]$ y las funciones x^3 y x^2.
   c) ¿Existe alguna relación entre la cantidad de elementos en las clases de equivalencia y el que f sea inyectiva?

5. Sean $(A, \succsim_1)$ y $(B, \succsim_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Demuestre que el conjunto $(A \times B, \succsim)$ donde

   $$(a, b) \succsim (a', b') \iff a \succ_1 a' \quad \text{ó} \quad (a = a' \quad \text{y} \quad b \succsim_2 b')$$

   es un conjunto parcialmente ordenado.

6. Considera el conjunto $X = \mathbb{R}^2_+$ y la relación de preferencias definida en X especificada en cada inciso. Determina si las relaciones son de equivalencia y en tal caso describe las clases de equivalencia.

   a) $\succsim_1$ definida mediante el orden lexicográfico, esto es

   $$(x_1, x_2) \succsim_1 (y_1, y_2) \iff x_1 > y_1 \quad \text{ó} \quad (x_1 = y_1 \quad \text{y} \quad x_2 \geq y_2)$$

   b) $\succsim_2$ definida como sigue

   $$(x_1, x_2) \succsim_2 (y_1, y_2) \iff ax_1 + bx_2 \geq ay_1 + by_2,$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ son constantes.

   c) $\succsim_3$ definida como sigue

   $$(x_1, x_2) \succsim_3 (y_1, y_2) \iff \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}.$$

7. Demuestre que si existe un elemento máximo de un subconjunto parcialmente ordenado entonces es único.

8. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto parcialmente ordenado tales que $A \subseteq B$. Demuestra que cualquier cota superior de B lo es también de A. Si existe $\sup B$, ¿También existe $\sup A$?

9. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente. Considera el conjunto

$$C := \{a + b | a \in A, b \in B\},$$

   demuestra que existe $\sup C$ y además $\sup C = \sup A + \sup B$.

10. Determina si las proposiciones siguientes son verdaderas, en cada caso proporciona una demostración o un contraejemplo.

    a) Una relación no puede tener las propiedades simetría y antisimetría al mismo tiempo.

    b) Cualquier elemento maximal de un conjunto parcialmente ordenado $(X, \succsim)$ es máximo si la relación es completa.